ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МНОГОУРОВНЕВЫЕ ПАРАЛЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ СИСТЕМАМИ

Ахметзянов А.В.*, Кушнер А.Г.**, Лычагин В.В.***

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, awa@ipu.ru
** Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, kushnera@mail.ru
*** Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Университет Тромсе, Норвегия. *valentin.lychagin@matnat.uit.no*

В работе представлены результаты обзорного анализа и применения параллельных вычислительных технологий для моделирования и оптимального управления нелинейными многосвязными системами с распределенными параметрами сверхбольшой размерности. В докладе рассматриваются многоуровневые варианты декомпозиции с расщеплением по физическим процессам и пространственным координатам в сочетании с многосеточными (конечно-разностными и конечно-элементными) методами аппроксимации исходных задач математической физики в иерархически вложенных функциональных пространствах. Предлагаемые иерархические принципы распараллеливания вычислений предоставляют универсальные возможности согласования структуры алгоритмов и архитектуры многопроцессорных вычислительных систем, следовательно, обеспечивают максимальную загрузку многоядерных процессоров.

1. Введение

Современная тенденция развития многопроцессорных вычислительных систем (МВС) открывает новые возможности для разработки высокоэффективных методов моделирования многосвязных систем [1] с многоуровневой декомпозицией и иерархическим распараллеливанием вычислений. Для большинства реальных многосвязных систем большой размерности такой подход является единственно возможным способом создания адекватных вычислительных моделей объектов управления. В частности, при разработке вычислительных моделей управления процессами:

- теплопередачи, конвекции-диффузии и массопереноса в сплошных средах;
- многофазной фильтрации флюидов в пористых средах подземных резервуаров месторождений углеводородов и распределения потоков в промысловых нефтегазосборных сетях;
- распределения потоков от источников к потребителям в объединенных сетях газопроводов и линий электропередачи;
- контроля и регулирования уровня подземных вод в системах предотвращения экологических катастроф в мегаполисах, промышленных зонах и других объектах охраны и защиты окружающей среды.

Обычно дискретные модели физических процессов, описываемых системами уравнений в частных производных, обладают степенями свободы (узлами) порядка 10^9 и более. Создание моделей таких размерностей требуют разработки алгоритмов нового поколения, обеспечивающих эффективное распараллеливание вычислений на МВС. Для достижения этой цели наиболее эффективны методы декомпозиции системы на отдельные подсистемы, на границах раздела которых задаются условия трансверсальности или непрерывности на фазовые переменные.

В основе современных вычислительных технологий с использованием методов декомпозиции лежат результаты, предложенные *Л. Шварцем* [2] для построения альтернирующей итерационной процедуры по подобластям для решения эллиптического уравнения в составной области. Потенциал метода Шварца был реализован лишь во второй половине прошлого века в нарастающем объеме публикаций[1], среди которых работ можно выделить монографии *В.И. Агошкова, В.И. Лебедева* [3-6] и статью *А.М. Мацокина, С.В. Непомнящих* [7], заложивших теоретические основы методов декомпозиции в вычислительной математике. Обычно методы декомпозиции области (*DDM – domain decomposition method*) в монографиях зарубежных и отечественных авторов формулируются как аддитивные методы Шварца. Например, *J. Xu* [8]; *B. Smith, P. Bjorstad, W. Gropp* [9]; *A. Quarteroni, A. Valli* [10]) и *А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич* [11].

Эффективность этих методов определяется естественным разбиением основной задачи на подзадачи меньшей размерности и распараллеливанием алгоритмов их решения. Однако скорость обмена между процессорами и их ядрами у современных и перспективных МВС не допускает возможность достижения требуемого уменьшения размерности подсистем, поскольку для эффективности распараллеливания необходимо, чтобы суммарное время обмена данными между процессорами было достаточно малым по сравнению общим временем вычислений в отдельных процессорах. Следовательно, размерность подзадач и соответствующий объем вычислений на каждом процессоре должен быть достаточно большим и для решения проблемы размерности в локальных подзадачах также целесообразно применение параллельных вычислительных технологий. Многоуровневые аддитивные методы Шварца здесь не перспективны, поскольку многоступенчатое расщепление сеточных операторов ухудшают условия устойчивости и сходимости алгоритмов. В этих условиях наиболее целесообразным является применение многоуровневой декомпозиции в сочетании с методами конечных суперэлементов и многосеточными методами. Именно, разработка и обоснование таких методов является предметом исследования в этой работе.

Методы конечных суперэлементов, предложенные в работах *Страховской Л.Г., Федоренко Р.П.* [12-13], наиболее эффективны при декомпозиции области определения решений для большого класса систем. В частности, для моделирования объектов, обладающих локальными неоднородностями (например, большие градиенты решения). Для учета особенностей измельчение шага сетки недопустимо, поскольку приводит к увеличению размерности и потере устойчивости алгоритмов. Пусть локальные неоднородности сосредоточены в малой окрестности особых точек, тогда требуемая точность сеточной аппроксимации достигается на сетке с шагом $h << H$, где H – характерные размеры неоднородностей. В этом случае область определения решений может быть аппроксимировано сеточным разбиением на многогранные суперэлементы с характерными размерами $\sim H$ двух типов, содержащие внутри себя особые точки или нет. В результате все особенности будут локализованы внутри суперэлементов первого типа, а вблизи их интерфейсных узлов, ребер и граней, а также в остальных, решения будут относительно гладкими (градиенты достаточно малы). Таким образом, создаются предпосылки построения разномасштабных методов моделирования с шагом h в суперэлементах и с шагом H во всей области решения. Для линейных систем это осуществляется в два этапа. Сначала для всех суперэлементов определяются *базисные функции*, являющиеся *решения вспомогательных задач* с шагом ~h *при заданных* в вершинах многогранника и особой точке *граничных условиях*, для суперэлементов первого типа и только в вершинах для остальных. При этом каждая базисная соответствует граничным условиям, образующих разбиение единицы, т.е. равным единице на одной из вершин и нулю на всех остальных, включая особую точку, если она есть.

Решение задачи моделирования системы в целом определяется из *балансовых уравнений* или *уравнений Пуанкаре-Стеклова* [14-15], составленных из условий непрерывности фазовых переменных на интерфейсных вершинах, ребрах и гранях смежных суперэлементов. Для моделирования квазилинейных систем такая процедура производится на каждом итерацион-

[1] *www.ddm.org*

ном слое, а для нелинейных задача сводится к решению к аппроксимирующей последовательности линейных операторных уравнений с использованием асимптотических методов линеаризации. Например, *методов теории возмущений и др.* [16].

В общем случае, число масштабов неоднородности может больше двух, возможно этим объясняется общепринятое английское название метода конечных суперэлементов – *multiscale finite element method* (*MsFEM*) [17].

По существу метод конечных суперэлементов можно трактовать как *обобщение аддитивных методов декомпозиции* (*Л. Шварца*) на многосвязные области с внутренними неоднородностями, например, для объектов тепломассопередачи с внутренними источниками и стоками и многофазной фильтрации в резервуарах месторождений углеводородов с добывающими и нагнетательными скважинами.

Многосеточные методы (*MGM – multi-grid method*), предложенные в работах *Р.П. Федоренко* [18-19], *Н.С. Бахвалова* [20] и *Г.П. Астраханцева* [21], получили окончательное признание после публикации статьи *A. Brandt*'а [22]. Современные варианты многосеточных методов с изложением теории и приложений опубликованы в монографиях *W. Hackbush*'а [23-24], *В.В. Шайдурова* [25], *М.А. Ольшанского* [26] и *Ю.В. Васильевского и М.А. Ольшанского* [27] и других работах[2].

Решение задач моделирования и оптимального управления многосвязных систем затруднено их большой размерностью, наличием ограничений на управляющие и фазовые координаты. Преодоление этих затруднений обычными методами моделирования невозможно из-за «проклятия размерности», поэтому для построения эффективных методов необходимо выявление и использование характерных структурных свойств объектов управления.

Для большинства многосвязных систем с распределенными параметрами, описываемых системами алгебраических или интегральных уравнений или уравнений математической физики параболического и эллиптического типов, самовлияние в каждом контуре или канале управления положительно, а взаимодействия между ними отрицательны. Задачи оптимального управления для такого объектов управления обладают особенностями, которые существенно используются при построении вычислительных алгоритмов. Благодаря чему, обеспечивается монотонная сходимость последовательных приближений фазовых переменных к их оптимальным значениям.

2. Задачи моделирования

В предлагаемом докладе рассматриваются методы и подходы [28-35] к решению проблем моделирования, проектирования и управления процессами фильтрации в пористых средах резервуаров месторождений углеводородов, относящихся к классу многосвязных систем большой размерности. Проблема моделирования формулируется в самой общей постановке, т.е. для месторождений углеводородов обладающих сложной геологией и геометрией резервуара, например, с большой «газовой шапкой», тонкой «нефтяной оторочкой» и подстилающей «водяной подушкой».

Особенности пористой среды резервуаров газонефтяных месторождений: большая объемная протяженность, пространственная неоднородность, сжимаемость флюидов и самой пористой среды, обуславливают необходимость разработки и создания специальных программных комплексов с использованием новых достижений вычислительной математики. В частности, иерархических многосеточных вариантов методов декомпозиции области (газо-, нефте- и водоносной частей резервуара), расщепления по физическим процессам и пространственным координатам. При таком подходе резервуар месторождения изначально разбивается на относительно однородные геологические тела, а каждое геологическое тело, в свою очередь разбивается на непересекающиеся подмножества суперэлементов, т.е. каждое геоло-

---

[2] *www.mgnet.org*

гическое тело подвергается декомпозиции области. Предполагается, что каждый блок может содержать забой только одной скважины или вовсе не содержать его. Таким образом, основными расчетными элементами вычислительных моделей фильтрации флюидов в пористых средах становятся суперэлементы со скважиной или без нее. Для достижения наибольшей универсальности методов моделирования и экономичности используется многоуровневый процесс вычислений на множестве иерархически вложенных сеточных аппроксимаций соответствующих краевых задач для исходных уравнений теории фильтрации в пористых средах. Далее в каждом суперэлементе содержащем или не содержащем забой скважины используется многосеточные варианты конечно-разностных, конечно-объемных (балансовых) или конечно-элементных (вариационных) методов. На суперэлементах со скважиной или без нее сеточная аппроксимация производится на квазиравномерных или равномерных сетках.

На практике целесообразно сначала разрабатывать нефтеносную часть резервуара без фронтального прорыва газа и воды из газо- и водоносных частей резервуара. Такие режимы отбора нефти возможны лишь с использованием горизонтальных скважин с малыми депрессиями в их призабойных зонах и барьерных заводнений на газо- и водонефтяной границах.

В этих условиях проникновение флюидов из нефтяной оторочки в другие части резервуара не возможно, поэтому физические процессы фильтрации флюидов в нефтяной оторочке, газа и подошвенной воды в газовой шапке и подошве резервуара можно рассматривать независимо. При этом проникновения газа и воды в нефтяную оторочку необходимо учитывать путем согласования в пространстве и времени на исходных границах разделов газонефтяной и водонефтяной частей резервуаров.

Если пренебречь малыми гравитационными силами, изотермическая неустановившаяся фильтрация природного газа в не деформируемой пористой среде газовой шапки месторождения определяется решением начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения

$$\chi(P)\partial P/\partial t = \operatorname{div}\operatorname{grad} P, \quad \partial P/\partial n = 0, \forall x \in S_{\text{г}} = \partial\Omega_{\text{г}} \setminus \Gamma_{\text{гн}},$$

(1)
$$\frac{1}{2\sqrt{P}}\frac{\partial P}{\partial n} = -\frac{\partial p}{\partial n}, \sqrt{P} = p, \forall x \in \Gamma_{\text{гн}}, \quad P(x,t)|_{t=0} = P_{\text{н}}(x), \forall x \in \Omega_{\text{н}},$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_{\text{г}} = \Omega \setminus \Omega_{\text{н}} \cup \Omega_{\text{в}} \subset R^3$ – декартовы координаты точек газовой шапки резервуара месторождения, содержащего, кроме газовой шапки $\Omega_{\text{г}}$, также нефтяную оторочку $\Omega_{\text{н}}$ и водяную подушку $\Omega_{\text{в}}$, т.е. $\Omega = \Omega_{\text{н}} \cup \Omega_{\text{г}} \cup \Omega_{\text{в}}$. Далее $\partial\Omega_{\text{г}}$ − внешняя граница газовой шапки, а $\Gamma_{\text{гн}} = \partial\Omega_{\text{г}} \cap \partial\Omega_{\text{н}}$ − граница раздела газовой шапки и нефтяной оторочки, $\Gamma_{\text{нв}} = \partial\Omega_{\text{н}} \cap \partial\Omega_{\text{в}}$ − граница раздела нефтяной оторочки и водяной подушки, k и m – проницаемость и пористость породы газовой шапки, $P = P(p)$ – преобразование Кирхгофа, $p = p(x,t)$ – давление газа в точке $x \in \Omega$ в момент времени $t > 0$ и $\chi(P)$ определяются баротропными свойствами газа. Для совершенного газа эта функция определяется соотношением $\chi(P) = mk/\mu P^{1/2}$, где $\rho = \rho(p) = \rho_0 p/p_0$, $P = \rho_0 p^2/2p_0$, ρ_0 – плотность газа при атмосферном давлении газа p_0, μ и ρ – динамическая вязкость и плотность газа в пластовых условиях, а для реальных газов соотношениями

(2) $$\chi(P) = \frac{mk}{\mu}\frac{\partial\rho}{\partial P} = \frac{mk}{\mu}\frac{z(p) - pdz(p)/dp}{z(p)dp}, \rho(p) = \frac{\rho_0 z(p_0)}{p_0}\frac{p}{z(p)}, P = \frac{\rho_0 z(p_0)}{p_0}\int\frac{pdp}{z(p)},$$

где $z(p)$ – коэффициент сверхсжимаемости газа. Обычно полагают, что $z(p) = z(p_0) \times$ $\times\left(1 - a_z(p_0 - p)\right)$ или $z(p) = z(p_0)\exp\left(-a_z(p_0 - p)\right)$, если диапазон изменения давления мал или велик, соответственно. Таким образом, для совершенного газа уравнение (1) совпадает с уравнением Лейбензона. Следовательно, для решения задач моделирования и управления разработкой газовой шапки в газовом режиме, т.е. в режиме истощения, процесс фильтрации газа определяется как решение начально-краевой задачи (1) при $\chi(P) = mk / \mu P^{1/2}$, где $\rho = \rho(p) = \rho_0 p / p_0$, $P = \rho_0 p^2 / 2p_0$.

Согласно изложенным предположениям, в данной части рассматривается следующая система уравнений в частных производных, описывающая фильтрацию нефти, воды и газа в двухмерной области нефтяной оторочки Ω (без учета влияния капиллярных сил)

$$\sum_{i=1}^{3} \rho_i^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \rho_i \frac{k_i}{\mu_i} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \rho_i \frac{k_i}{\mu_i} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right\} = m \sum_{i=1}^{3} \frac{s_i}{\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} k_i \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_i \frac{k_x}{\mu_i} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \rho_i \frac{k_x}{\mu_i} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial k_i}{\partial x} \frac{\partial s_i}{\partial x} + k_i \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_i \frac{k_y}{\mu_i} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \\ + \rho_i \frac{k_y}{\mu_i} \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial k_i}{\partial y} \frac{\partial s_i}{\partial y} == m \rho_i \frac{\partial s_i}{\partial t} + m s_i \frac{\partial \rho_i}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad i = 1,3. \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь, $p(x, y, t)$ - распределение давления; $s_i(x, y, t)$ - распределение насыщенности фазы i; k_x, k_y - коэффициент проницаемости в направлении осей Ox и Oy; k_i - зависимость относительной фазовой проницаемости фазы i; $\rho_i(p)$ - зависимость плотности фазы i от давления; $\mu_i(p)$ - зависимость вязкости фазы i от давления. Необходимо отметить, что в уравнениях (3) и (4) можно исключить любую из функций насыщенности с использованием балансового соотношения $s_1 + s_2 + s_3 = 1$.

В результате в (4) останется только два уравнения вместо трех, однако, это сильно усложнить не только структуры слагаемых входящих в эти уравнения, но существенно ограничит возможности выбора высокоэффективных алгоритмов вычислительного моделирования и управления разработкой нефтяных оторочек газонефтяных месторождений.

Предполагается, что изначально разрабатывается нефтяная оторочка и только после истощения нефтяной оторочки может разрабатываться газовая шапка с использованием тех же скважин, поэтому в докладе основное внимание уделяется постановке и решению задачи моделирования процессов фильтрации в нефтяной оторочке. Система нелинейных уравнений модели (3)-(4) для каждого однородного блока $\Theta \subset \Omega_{н}$ после дискретизации, т.е. сеточной аппроксимации, по пространству приводится к системе нелинейных операторных уравнений эволюционного типа. Выбор способа дискретизации определяется геометрическими характеристиками и структурой неоднородности резервуаров газовых месторождений с нефтяной оторочкой. Для выбранной сетки дискретная аппроксимация производится с использованием консервативных конечно-разностных и конечно-элементных методов, в сочетании с методами декомпозиции области с расщеплением по физическим процессам и пространственным координатам. Для повышения точности вычислений в призабойных зонах скважин можно воспользоваться методом конечных суперэлементов с многосеточной аппроксимацией на квазиравномерных сетках. Модель фильтрации флюидов в пористых средах формулируется как нелинейная задача Коши для системы уравнений (3)-(4), решение которой на каждом временном слое при равномерной аппроксимации по времени производится последовательно. Для реальных нефтяных оторочек размерность однородных блоков, как правило, достаточно велика и необходимая точность вычислений требует измельчения шагов дискретизации по пространству и времени, что приводит к увеличению размерности и необходимости использования новых методов.

Предлагаемые подходы и методы ориентированы на использование многопроцессорных вычислительных систем с параллельной организацией вычислений, например кластерного типа. Для параллельной организации вычислений однородный блок нефтяной оторочки

$\Theta \subset \Omega_{н}$ разделим на два подмножества D_1 и D_2 такие, что $D_1 \cup D_2 = \Theta$ и $\mathrm{mes}(D_1 \cap D_2) = 0$, т.е. подмножества, мера пересечения которых равна нулю.

Таким образом, при фиксированных значениях $s_i, i = \overline{1,3}$ и p уравнения системы (3)-(4) становятся уравнениями параболического и гиперболического (квазилинейного первого порядка) типов, соответственно. Для таких систем итерации по времени целесообразно совершать на каждом временном слое в два этапа, поочередно решая уравнение (3) и независимые уравнения системы (4), т.е. при заданных значениях насыщенностей $s_i^{(n)}, n = 0,1,2,\ldots, i = \overline{1,3}$ сначала решается уравнение (3) и определяется распределение $p^{(n+1)}, n = 0,1,2,\ldots$, а затем при заданном $p^{(n+1)}, n = 0,1,2,\ldots$ решаются независимые уравнения (4) и определяется распределение $s_i^{(n+1)}, n = 0,1,2,\ldots,\ \ i = \overline{1,3}$.

После дискретизации по пространственным переменным и преобразований необходимых для учета граничных условий вместо начально-краевых задачи для системы (3)-(4) получим, соответствую задачу Коши для следующей системы эволюционных уравнений

(5) $$dp/dt + A(s)p = f_p,\ p(x,t)|_{t=0} = p_0(x), \quad s = (s_1, s_2, s_3),\ s_1 + s_2 + s_3 = 1;$$

(6) $$ds_i/dt + B_i(p)s_i = f_{s_i},\ s_i(x,t)|_{t=0} = s_{i0}(x),\ i = \overline{1,3};$$

где квазилинейные операторы соответствуют дискретным (конечно-разностным или конечно-элементным) аналогам соответствующих выражений

Схема декомпозиции области решения задачи Коши для системы уравнений эволюционного типа (5)-(6) определяется выбором конкретной схемы разложения исходной области (резервуара нефтяной оторочки). Для схемы декомпозиции строится на основе разбиения единицы, согласно выражениям

$$\delta_\alpha(x,y) = \{>0,\ x,y \in D_\alpha;\ 0,\ x,y \notin D_\alpha\},\ \alpha = 1,2;\ \ \delta_1(x,y) + \delta_2(x,y) = 1\ \ x,y \in \Omega_{н} = D_1 \cup D_2;$$
$$A^{(\alpha)} = \delta_\alpha A, \quad A^{(\alpha)} \neq (A^{(\alpha)})^*,\ \alpha = 1,2;\ \ B^{(\alpha)} = \delta_\alpha B,\ B^{(\alpha)} \neq (B^{(\alpha)})^*,\ \alpha = 1,2.$$

Из этих выражений следует, что операторы A и B не являются самосопряженными.

Обычно на внутренних границах между суперэлементами задаются условия равенства давлений и баланса потоков, а выбор конкретной схемы расщепления вычислений для рассматриваемой схемы декомпозиции определяются исходными требованиями к эффективности алгоритма (устойчивости, скоростью сходимости и точности вычислений). Пусть p_n и $s_{in}, i = \overline{1,3}$ – решение системы (6) в момент времени $t = n\tau,\ \tau > 0$ – шаг по времени, тогда переход на новый временной слой осуществляется последовательно в два этапа, согласно

$$(p_{n+1/2} - p_n)/\tau + \delta_1(x,y)A^{(1)}(s_n)p_{n+1/2} + \delta_2(x,y)A^{(2)}(s_n)p_n = \varphi_n,$$
$$(s_{i,n+1/2} - s_{i,n})/\tau + \delta_1(x,y)B^{(1)}(s_{i,n}, p_{n+1/2})s_{i,n+1/2} + \delta_2(x,y)B^{(2)}(s_{i,n}, p_{n+1/2})s_{i,n} = \psi_n,\ i = \overline{1,3};$$
$$(p_{n+1} - p_{n+1/2})/\tau + \delta_2(x,y)A^{(2)}(s_{n+1/2})(p_{n+1} - p_n) = \varphi_n,$$
$$(s_{i,n+1} - s_{i,n+1/2})/\tau + \delta_2(x,y)B^{(2)}(s_{i,n+1/2}, p_{n+1})(p_{n+1} - p_n) = \psi_{in},\ \ i = \overline{1,3}.$$

Здесь A и B не обладают симметрической формой, то для улучшения сходимости целесообразно воспользоваться методами аддитивной регуляризации с возмущенными (факторизованными) операторами типа $\{H = E \mapsto E + \mu R,\ A\}$ и $\{H = E,\ A \mapsto A - \mu R\}$ при $R = A$ или $R = A^2$ для канонической формы двухслойного итерационного метода для уравнения (5), т.е. $H(p^{n+1} - p^n)/\tau + Ap^n = \varphi_n,\ n = 0,1,\ldots$. Аналогично, при $R_i = B_i$ или $R_i = B_i^2$, можно воспользоваться операторами $\{H_i = E \mapsto E + \mu R_i, B_i\}$, и $\{H_i = E, B_i \mapsto B_i - \mu R_i\}$ для канонической формы уравнений (6) $H_i(s_i^{n+1} - s_i^n)/\tau + B_i s_i^n = \varphi_{in},\ n = 0,1,\ldots,\ i = \overline{1,3}$.

Решение локальных подзадач на суперэлементах, принадлежащих $\Theta_j \in D_1$ или $\Theta_j \in D_2$, требует большого объема вычислений, что связано наличием горизонтальных стволов (забоев) скважин, вблизи которых в наибольшей степени проявляются нелинейные эффекты. Поэтому для решения локальных подзадач необходимо воспользоваться квазиравномерными многосеточными вариантами конечно-разностных методов, сгущающихся по мере приближения к забою скважины. При таком подходе требования точности обеспечиваются даже на грубых сетках, что достигается многократными вычислениями на множестве вложенных сеточных аппроксимаций.

4. Расчет сингулярных режимов

Под сингулярными решениями дифференциальных уравнений понимают либо разрывные решения типа ударных волн, либо непрерывные решения, у которых разрывны частные производные (так называемые контактные ударные волны или слабые разрывы). Математический аппарат классической теории плохо приспособлен для построения сингулярных решений. Теория обобщенных функций, традиционно используемая при анализе разрывных решений, может быть применена лишь к линейным уравнениям.

Альтернативой аппарату обобщенных функций является теория особенностей, основанная на геометрической теории многозначных решений и развитая в работах московской школы в 70- 80-х годах XX века. Обзор первых результатов, полученных этой школой, представлены в монографии [37], а современных – в монографии [36].

Многозначное решение дифференциального уравнения k-го порядка представляет собой подмногообразие в пространстве k-джетов, размерность которого равна числу независимых переменных в уравнении и которое является интегральным многообразием распределения Картана.

При моделировании процессов добычи нефти и газа методом воздействия активными реагентами возникают трудности, связанные с расчетом фронта вытеснения. Это обусловлено тем, что соответствующие решения модельных дифференциальных уравнений имеют разрывы, то есть такие фронты распространяется подобно ударной волне.

Наличие разрывных решений создает известные трудности при построении разностных схем: требуется измельчение шага сетки при приближении к поверхности разрыва, положение которой к тому же неизвестно, что не обеспечивает требуемую точность вычислений. В результате получаются грубые алгоритмы.

В докладе представлено решение задачи расчета распространения фронта вытеснения нефти водой и активными реагентами при разработке нефтяных месторождений для модели с двумя пространственными переменными.

Соответствующее дифференциальное уравнение для двумерной модели процесса вытеснения водой описывается следующим квазилинейным уравнением:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(A(x,y,s)) + \frac{\partial}{\partial y}(B(x,y,s)) = 0.$$

Здесь s – водонасыщенность, *x*,*y* – пространственные переменные, а A и B – заданные функции. Этому уравнению отвечает гиперповерхность в пространстве 1-джетов. Многозначное решение этого уравнения – это трехмерное интегральное многообразие распределения Картана, лежащее на этой гиперповерхности.

Для численного построения многозначного решения задачи Коши мы используется сдвиг начальной поверхности вдоль траекторий соответствующего контактного векторного поля в пространстве 1-джетов. Этот алгоритм допускает эффективное распараллеливание.

Особые точки проекции многозначного решения на пространство независимых переменных *t*, *x*, *y* определяют каустики – поверхности в пространстве 1-джетов.

Отметим, что реальный разрыв решения происходит не в точках каустики и за возникновение разрыва отвечают условия Гюгонио-Ренкина, которые записываются исходя из законов сохранения. Эти условия в простейшем случае представляют собой уравнения Гамильтона-Якоби, решения которых и определяют поверхность разрыва, что позволяет применить методы гамильтоновой механики для управления фронтами вытеснения нефти (см. [38]).

3. Задачи проектирования и управления

Задачи проектирования и управления разработкой месторождений углеводородов должны быть согласованы с многоуровневой структурой модели. Это означает, что структура и уровни иерархии декомпозиции и расщепления задач моделирования, проектирования и управления должны быть идентичны. На каждой итерации решения задач проектирования или управления с использованием построенной гидродинамической модели резервуара определяются допустимые режимы соответствующие выбранным стратегиям размещения и темпа бурения скважин, а также управляющим воздействиям, заданным на добывающих и нагнетательных скважинах (внутренних граничных условиях). Для решения задач оптимизации проектирования и управления возможны два варианта постановки: максимум добычи нефти при заданном уровне суммарной закачки воды (реагента) или минимум суммарной закачки воды при заданном уровне добычи нефти. В обоих случаях вводятся обобщенные критерии в виде функций Лагранжа, учитывающие ограниченность заданного уровня ресурсов, т.е. суммарной закачки воды или суммарной добычи нефти. При таком подходе значения обобщенных критериев на каждой итерации можно определять по соответствующим сопряженным уравнениям (линейным в окрестности любой точки пространства состояний), что значительно снижает трудоемкость вычислений в процессе поиска оптимума. Если оптимальное значение обобщенного критерия определено, то из условия Лагранжа для прямых и сопряженных операторов следует, что оптимальное решение прямой задачи определяется из решения прямых операторных уравнений с учетом полученного оптимального сопряженного решения.

Для реализации предлагаемого подхода к построению параллельных программ может быть использована среда MPI, OpenMP, OpenCL, CUDA и др. Эффективность вложения предлагаемых многоуровневых методов в архитектуру МВС гарантирована, благодаря равномерному распределению объема вычислений по процессорам на каждом уровне иерархической декомпозиции и расщепления (подтверждается вычислительными экспериментами).

4. Заключение

Предлагаемые иерархические принципы для решения задач моделирования и управления многосвязными системами свойствами универсальности, поскольку позволяют учитывать специфические особенности объектов управления. Высокая эффективность практического использования предлагаемых методов с иерархическим распараллеливанием вычислений обеспечивается благодаря оптимальным проектным решениям (за счет экономии средств на оборудование) и выбора оптимального распределения ресурсов управления (за счет экономии эксплуатационных затрат). В частности, для крупномасштабных месторождений углеводородов высокая эффективность практического использования предлагаемых методов для выбора проектных решений и оптимального управления в процессе их разработки будет обеспечиваться за счет:

- экономии средств на бурение и оборудование скважин,
- повышения коэффициента извлечения углеводородов,
- достижения требуемого планового отбора продукции добывающих скважин при минимальных затратах на закачку вытесняющего реагента в нагнетательные скважины.

Литература

1. Мееров М.В., Ахметзянов А.В., Берщанский Я.М., Кулибанов В.Н. и др. Многосвязные системы управления. М.: Наука, 1990. 264 с.
2. Schwarz H. Uber einige Abbildungsaufgaben // J. Reine Angew. Math. 1869. V 70, P. 105-120.
3. Лебедев В.И., Агошков В.И. Операторы Пуанкаре-Стеклова и их приложения в анализе. М. ОВМ АН СССР, 1983. 184 с.
4. Агошков В.И., Лебедев В.И. Операторы Пуанкаре-Стеклова и методы разделения области в вариационных задачах / Вычислительные процессы и системы. М.: Наука. 1985. С. 173-227.
5. Агошков В.И. Операторы Пуанкаре-Стеклова и методы разделения области в конечномерных пространствах. М. ОВМ АН СССР, 1987. 35 с.
6. Лебедев В.И. Методы композиции. М. ОВМ АН СССР, 1986. 191 с.
7. Мацокин А.М., Непомнящих С.В. Метод альтернирования Шварца в подпространстве // Известия высш. учебных заведений. Математика. 1985. № 10, С. 61-66.
8. Xu J. Iterative Methods by Space Decomposition and Correction // SIAM Rewiew. 1992. V. 34. P. 581-613.
9. Smith B., Bjorstad P., Gropp W. Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for elliptic Partial Differential Equations. Cambridge University press. 1996. 225 p.
10. Quarteroni A., Valli A. Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. Oxford Science Publications. 1999. 376 p.
11. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Аддитивные схемы для задач математической физики М.: Наука. 1999. 319 с.
12. Страховская Л.Г., Федоренко Р.П. Об одной специальной разностной схеме // Численные методы механики сплошной среды. Сб. тр. ВЦ СО АН СССР, 1976. Том 7. № 4. С. 149-163.
13. Страховская Л.Г., Федоренко Р.П. Об одном варианте метода конечных элементов // ЖВМ и МФ. Т. 19. 1979. № 4. С. 950-960.
14. Федоренко Р.П. О некоторых задачах и приближенных методах вычислительной механики // ЖВМ и МФ. Т 34. 1994. №2. С. 267-289.
15. Галанин М.П., Савенков Е.Б. К обоснованию метода конечных суперэлементов // ЖВМ и МФ. Т. 43. 2003. № 5. С. 713-729.
16. Агошков В.И., Дубовский П.Б., Шутяев В.П. Методы математической физики. М. Физматлит. 2002. 320 с.
17. Efendiev Y., Hou Th. Multiscale Finite Element Methods. Theory and Applications. Springer/
18. Федоренко Р.П. Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений // ЖВМиМФ. 1961. Т.1. С. 922-927.
19. Федоренко Р.П. О скорости сходимости одного итерационного процесса // ЖВМиМФ. 1964. Т.4. С. 227-235.
20. Бахвалов Н.С. О сходимости одного релаксационного метода для эллиптического оператора с естественными ограничениями // ЖВМиМФ. 1966. Т.6. С. 101-135.
21. Астраханцев Г.П. Об одном итерационном методе // ЖВМиМФ. 1971. Т.11. С. 439-448.
22. Brandt A. Multi-level adaptive solutions to boundary value problems // Math. Comp. 1977. V.31. P. 333-390.
23. Hackbusch W. Multi-grid methods and applications. Berlin, Heidelberg: Springer, 1985.

24. Hackbusch W. Iterative solution of large sparse systems of equations. New York, Berlin: Springer, 1994.
25. Шайдуров В.В. Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука, 1989.
26. Ольшанский М.А. Лекции и упражнения по многосеточным методам. М.: Физматлит. 2005. 168 с.
27. Васильевский Ю.В., Ольшанский М.А. Краткий курс по многосеточным методам и методам декомпозиции области. М.: МГУ. 2007. 103 с.
28. Ахметзянов А.В. Вычислительные аспекты управления процессами фильтрации жидкостей и газов в пористых средах // АиТ. 2008. № 1. С. 3-15.
29. Ахметзянов А.В. Декомпозиция и распараллеливание вычислений при моделировании нелинейной фильтрации флюидов в пористых средах. Труды четвертой международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления (PACO'2008)». М.: ИПУ РАН. 2008. С. 93-103.
30. Atlas V. Akhmetzyanov Large-Scale Nonlinear Multivariable Systems (Decomposition, Modelling and Control Problems) // IFAC'2008: Proceedings of the 17-th World Congress the International Federation of Automatic Control, July 2008, Seoul, Korea. Pp. 6060-6065.
31. Ахметзянов А.В., Ермолаев А.И., Гребенник О.С. Оптимизация и выбор систем разработки группы нефтяных и газовых залежей / Труды Третьей международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2009). М.: ИПУ РАН. С.
32. Ахметзянов А.В. Проблемы моделирования и управления разработкой крупномасштабных месторождений нефти и газа // Материалы четвёртой международной конференции «Управление Развитием крупномасштабных систем, MLSD 2010. 4-6 октября 2010, Москва, Россия». – М.: Учреждение Российской академии наук Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2010, том 2. С. 229-239.
33. A.V. Akhmetzyanov, I.I. Ibragimov, E.A. Yaroshenko. Integrated Hydrodynamic Models of Oil Field Development Processes. // Automation and Remote Control, 2012, Vol. 72, No. 2, pp. 345-354. Pleiades Publishing, Ltd., Moscow.
34. A.V. Akhmetzyanov, A.M. Salnikov. Problems of Identification of Hydrodynamic Models in Reservoir Engineering // Proceedings of 2012 IFAC Workshop on Automatic Control in Offshore Oil and Gas production. NTNU, Trondheim, Norway, 30 May ÷ 01 June 2012.
35. A.V. Akhmetzyanov, A.I. Ermolaev, O.S. Grebennik. Parallel Computing in Optimal Design of Multihorizon Oil and Gas Fields Development // Proceedings of 2012 IFAC Workshop on Automatic Control in Offshore Oil and Gas production. NTNU, Trondheim, Norway, 30 May ÷ 01 June 2012.
36. Kushner, A.G., Lychagin, V.V., Rubtsov, V.N. Contact geometry and nonlinear differential equations. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 101, Cambridge University Press, Cambridge, 2007, xxii+496 pp.
37. Vinogradov, A.M., Krasil'shchik, I.S., Lychagin, V.V. Geometry of jet spaces and nonlinear partial dif-ferential equations. Advanced Studies in Contemporary Mathematics, 1, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1986, xx+441 pp.
38. Ахметзянов А.В., Кушнер А.Г., Лычагин В.В. Геометрическая теория особых режимов в системах управления с распределенными параметрами// Автоматика и телемеханика, № 11, 2013 (в печати).